ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ THỊ LOAN

NGHỊCH ĐẢO SUY RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ THỊ LOAN

NGHỊCH ĐẢO SUY RỘNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. Đinh Nho Hào

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Đinh Nho Hào. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của em trong suốt quá trình làm luận văn.

Em cũng xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán-Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để em học tập và nghiên cứu. Đồng thời, em cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán K11C (khóa 2017-2019), cảm ơn gia đình bạn bè đã động viên và giúp đỡ em rất nhiều trong quá trình học tập.

Lời cam đoan

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo GS.TSKH Đinh Nho Hào cùng với sự cố gắng của bản thân. Trong quá trình nghiên cứu luận văn, tôi đã kế thừa những thành quả nghiên cứu của các nhà khoa học, các nhà nghiên cứu với sự trân trọng và biết ơn.

Tôi xin cam đoan những kết quả trong luận văn này là kết quả nghiên cứu của bản thân, không trùng với luận văn của tác giả khác.

Thái Nguyên, ngày   tháng   năm 2019

Tác giả

Mở đầu

Phương pháp bình phương tối thiểu xuất phát từ các nghiên cứu về thiên văn và khoa đo đạc. Từ các quan sát khác nhau của hiện tượng người ta cần xấp xỉ nó. Phương pháp này có cội nguồn từ các nghiên cứu khác nhau bắt đầu từ Roger Cotes vào năm 1722, Tobias Mayer khi nghiên cứu về chuyển động của mặt trăng năm 1750, Pierre-Simon Laplace khi nghiên cứu chuyển động của sao Mộc và sao Thổ năm 1788 ...

Người đầu tiên mô tả một cách tường minh và ứng dụng phương pháp bình phương tối thiểu đó là Adrien-Marie Legendre [5] vào năm 1805 khi ông phân tích các dữ kiện của Laplace về hình dạng quả đất. Phương pháp của Legendre được các nhà thiên văn học và các nhà đo đạc hàng đầu thời đó công nhận và sử dụng. Vào năm 1809, Carl Friedrich Gauss công bố phương pháp của ông về cách tính quỹ đạo của các thiên thể [4] và khẳng định rằng, phương pháp này do ông tìm ra từ năm 1795, trước cả Legendre. Gauss còn liên hệ phương pháp bình phương tối thiểu với các kết quả quan trọng trong lý thuyết xác suất về phân bố chuẩn ... Có khá nhiều tranh cãi về việc có đúng hay không, Gauss đã tìm ra phương pháp bình phương tối thiểu trước Legendre mặc dù ông công bố sau. Công trình của [10] đưa ra khẳng định, có lẽ điều này là đúng. Dù ai là người phát minh ra phương pháp này đầu tiên đi nữa, thì cho đến nay phương pháp bình phương tối thiểu là một phương pháp hết sức toàn năng và hiệu quả trong giải tích số, thống kê, ...

Phương pháp bình phương tối thiểu cho ta một các hiểu nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính, gọi là nghiệm bình phương tối thiểu - phần tử tối thiểu hóa bình phương chuẩn Euclide của độ lệch (discrepancy). Nghiệm bình phương tối thiểu là một giải pháp lý tưởng để hiểu được hệ phương trình đại số tuyến tính có số phương trình nhiều hơn số ẩn - hệ thường xuyên gặp trong các bài toán đo đạc. Tuy nhiên, nghiệm bình phương tối thiểu có thể không duy nhất, để khắc phục khiếm khuyết này, Moore [6] vào năm 1920 và sau đó là Penrose [8, 9] vào những năm 1955, 1956 đã đưa ra khái niệm nghịch đảo suy rộng và nghiệm suy rộng dựa trên lý thuyết phổ. Có nhiều cách tiếp cận đến nghịch đảo suy rộng khác nhau, nhưng trong luận văn này chúng tôi sử dụng định nghĩa nghiệm suy rộng là nghiệm bình phương tối thiểu có chuẩn nhỏ nhất. Chúng tôi dùng khái niệm này vì dùng nó ta có thể tiếp cận các bài toán đặt không chỉnh. Các kết quả trong luận văn này dựa vào các tài liệu [1, 2, 3, 7].

Luận văn gồm ba chương. Trong chương đầu chúng tôi tóm tắt một số khái niệm trong Đại số tuyến tính và Giải tích hàm. Chương 2 đề cập đến nghịch đảo suy rộng trong không gian Hilbert còn chương cuối đề cập đến khái niệm này nhưng trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Chương 1

Các khái niệm cơ bản về đại số tuyến tính và giải tích hàm

1.1. Không gian Euclide

Định nghĩa 1.1

Cho E là không gian vectơ trên trường số thực $\mathbb{R}$, một tích vô hướng trên E là một ánh xạ $<,>$: $E \times E \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \to < x, y >$$

thỏa mãn các điều kiện sau

1. $< x, y >=< y, x >$,
2. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$,
3. $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$,
4. $< x, x >\geq 0 \; \forall x \in E$ và $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Định nghĩa 1.2

Không gian vectơ E trên trường số thực $\mathbb{R}$ được gọi là không gian vectơ Euclide nếu trên E có một tích vô hướng.

Định nghĩa 1.3

Độ dài của một vectơ x của không gian vectơ Euclide E với tích vô hướng $<,>$ được xác định bởi:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

Định nghĩa 1.4

Đối với hai vectơ x và y của không gian vectơ Euclide thì ta gọi góc φ giữa x và y được xác định bởi công thức:

$$\cos\varphi = \frac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}$$

Khi không gian vector Euclide E là $\mathbb{R}^n$, ta viết vector $x \in \mathbb{R}^n$ dưới dạng

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

với $x_i \in \mathbb{R}$. Khi đó vector chuyển vị của x là $x^t = (x_1, \ldots, x_n)$.

Giả sử $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}, u, v \in \mathbb{R}^k, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{R}, u_1, \ldots, u_\ell \in \mathbb{R}^k$. Ta ký hiệu

I	ma trận đơn vị,
M^t	ma trận chuyển vị củaM,
$u^t v$	tích vô hướng của u với v,
$\|M\|$	chuẩn $\max\{\|Mx\| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$,
$\|M\|_F$	chuẩn Frobenius of M, $\|M\|_F := \left(\sum_{i,j} \|m_{i,j}\|^2\right)^2$,
$< u_1, \ldots, u_\ell >$	bao tuyến tính của $u_1, \ldots, u_\ell$,
$diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$	ma trận đường chéo trong $\mathbb{R}^{p,\ell}$ với các thành phần $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ trên đường chéo của nó ($p \geq 1$),
$(u_1 \| \ldots \| u_\ell)$	ma trận trong $\mathbb{R}^{k,\ell}$ với các cột là $u_1, \ldots, u_\ell$.